Minicorso
Controllo Statistico di Processo

di Andrea Saviano

Parte 1

- Nulla è certo fuorché… la morte, premessa
- Le decisioni in condizione d'incertezza
- Statistica descrittiva Vs statistica inferenziale
- Statistica & Probabilità
- Ispezionare poco, ma controllare tutto
- Se so di non sapere: controlli di processo e controllo in accettazione
- Matematica, richiami di teoria

Premessa

Cogito, ergo sum

Il pensiero è il processo di maturazione e formulazione delle decisioni e dei giudizi, questo processo avviene tramite:
- il **ragionamento**, esso è costituito da quei procedimenti mediante i quali le persone valutano e costruiscono le argomentazioni per risolvere i problemi, i quesiti o lo sviluppo delle idee;
- la **logica**, essa invece è una disciplina della filosofia e della matematica che cerca di specificare formalmente quali siano le condizioni che rendono logicamente corretta un'argomentazione.

Che si usi uno strumento o l'altro (oppure entrambi) **le decisioni e i giudizi devono fondarsi su dati *incerti***… apparentemente questa può sembrare una frase contenente un errore di battitura. Il lettore è indotto a ritenere che l'autore abbia messo un "**in**" di troppo, ma non è così.
Ciò che noi affermiamo essere certo in realtà è un qualcosa che riteniamo o molto probabile o molto affidabile, perché la certezza esiste solo nelle scienze esatte (teoriche) ma non nella realtà.
Le principali leggi della fisica, ad esempio, sono dei modelli matematici che descrivono la realtà con un sufficiente margine di affidabilità. Fenomeni complessi come il comportamento dei fluidi e dei gas, non prevedono leggi universali, ma un inviluppo di leggi che risultano affidabili sono in predeterminate condizioni.
Proseguiamo e approfondiamo l'argomento. Si riconoscono due tipologie di ragionamento:
- **ragionamento deduttivo**, è possibile pervenire con sicurezza dalle premesse di un'argomentazione alla sua conclusione, l'inferenza di tipo deduttivo parte da una o più asserzioni e arriva ad affermazioni di tipo generale, senza fare ricorso a dati empirici[1];
- **ragionamento induttivo**, partendo da dati particolari (di solito empirici) è possibile giungere a conclusioni corrette con una certa probabilità, questo tipo di ragionamento è quindi basato su un processo che parte dai dei casi particolari e ne estrapola delle regolarità.

[1] Ne sono un esempio pratico il ragionamento condizionale (*se… allora…*) e il sillogismo (*se… e… allora…*).

Se nel mondo reale non è possibile misurare con certezza, ma effettuare solo stime affette da errore ci si accorge che alla fine si ricade su ragionamenti di tipo **induttivo probabilistico** (legge dei grandi numeri), non si giudica l'evento, ma la probabilità che esso si verifichi.
La probabilità può allora essere riconcepita come il grado di certezza attribuibile al verificarsi di un evento
Si parla allora di **giudizio di probabilità**. Nella sua applicazione più grezza esso consiste nell'assegnare un numero o un valore booleano a un'affermazione (che può essere così considerata semplicisticamente vera o falsa), ad esempio:

0. giudico molto improbabile che domani piova;
1. giudico altamente probabile che domani piova.

Si parla anche di **approccio euristico**[2]. Si tratta di procedure mentali utilizzate per emettere giudizi di probabilità soggettiva (diversa e meno precisa di quella statistica). Procedure rapide, che non assicurano, però, la correttezza del risultato (a differenza degli algoritmi che sono procedure esatte che portano a risultati corretti); la filosofia, ad esempio, fa largo uso di questo tipo d'approccio.
Se crollano le certezze, ci si può solo limitare a fare delle previsioni, cioè a **stimare** la probabilità che un certo evento ha di verificarsi.
Inferenze: insieme dei processi attraverso cui vengono elaborate nuove conoscenze a partire da conoscenze date.
« *E quando qualcuno vi propone di credere a una proposizione voi dovete prima esaminare se essa è accettabile, perché la nostra ragione è stata creata da Dio, e ciò che piace alla nostra ragione non può non piacere alla ragione divina, sulla quale peraltro sappiamo solo quello che, per analogia e spesso per negazione, ne* ***inferiamo*** *dai procedimenti della nostra ragione.*[3] »
Introduciamo il concetto di inferenza. Quando noi costruiamo tramite logica un sillogismo efficace secondo lo schema:

SE
premessa maggiore
E
premessa minore
ALLORA
conclusione

C'è una sottile differenza tra il termine **implicare** e il termine **iferire**, nel primo caso il collegamento è esplicito, nel secondo caso è implicito, lo si ricava.

Le decisioni in condizione d'incertezza

Posto che le persone tendono ad accettare una conclusione che è in accordo con le loro conoscenze sul mondo, piuttosto che accettare una conclusione che è in disaccordo con le loro conoscenze sul mondo, com'è possibile esprimere giudizi oggettivi in regime d'incertezza?
Proseguiamo e approfondiamo l'argomento inferenza. Si riconoscono due tipologie di inferenze:

- **inferenza induttiva**, si cercano regolarità interne alla situazione (meccanismi associativi) o tra la situazione e le altre situazioni in memoria (induzione basata su analogia) oppure, a partire dalla regolarità individuata, si ipotizza una regola soggiacente alla situazione (generalizzazione).
- **inferenza deduttiva**, se le premesse sono vere allora è vera la conclusione;

Il fatto che sia stato invertito l'ordine rispetto a quanto proposto per il ragionamento è dovuto all'applicazione pratica. Nella prassi si tenta di estrapolare leggi e valicarle, quindi collegare tra loro gli elementi.

Statistica descrittiva Vs statistica inferenziale

Un esempio pratico di difficoltà ad avere certezze è quello correlato alle rilevazioni di tipo distruttivo. Si tratta quindi di generalizzare una stima effettuando un numero limitato di misurazioni. In questi casi può venire in aiuto la statistica tenendo bene a mente che esistono due approcci statistici per certi versi antitetici:

- **statistica descrittiva**, essa si occupa di descrivere sinteticamente grandi masse di dati tramite pochi numeri rappresentativi o attraverso grafici significativi

[2] Dal greco *heurískein* = trovare.
[3] Guglielmo da Baskerville in "*Il nome de la Rosa*" di Umberto Eco.

- **statistica inferenziale**, essa utilizza pochi dati statistici, per effettuare stime di tipo probabilistico su situazioni future o comunque incerte.

Nel primo caso vige la cosiddetta **legge empirica del caso**[4] nel secondo caso il **teorema del limite centrale**[5].
Da qui in poi si apre una vasta prateria, perché c'è un'altra disciplina che può venire in aiuto e che spesso è confusa con la statistica, questa disciplina è la **stocastica**[6], si tratta della teoria e dello studio dei processi casuali al fine di creare modelli matematici in grado di fornire stime di un evento empirico, caratterizzato da variabili casuali e governato dalle leggi della probabilità.
Un processo stocastico è quindi un insieme di variabili casuali che però rispondono a precise leggi probabilistiche, anche se non è possibile individuare puntualmente la traiettoria del processo, tuttavia è possibile stimare l'obiettivo della traiettoria stessa.

Come la freccia dell'arciere addestrato,
quando si allontana dalla corda dell'arco
non si dà riposo prima di arrivare al bersaglio,
così l'uomo è creato da Dio avendo come obiettivo Dio,
e non riesce a trovare riposo se non in Dio…

Statistica & Probabilità

Innanzitutto non è mai da intendersi che sia Statistica Vs Probabilità (o una o l'altra), ma Statistica & Probabilità (insieme), cioè le due scienze sono la gamba destra e sinistra di chi non voglia camminare zoppo sulla via della conoscenza.
Analizziamo il significato di due termini che spesso vengono confusi tra loro:

- **statistica**, tecnica che ha per scopo la conoscenza quantitativa dei fenomeni collettivi;
- **probabilità**, tecnica che ha per scopo la conoscenza del potersi verificare di un dato fenomeno.

I due concetti si fondono nella **legge dei grandi numeri**: quando **il numero dei casi possibili è elevato, il ripetersi di un evento segue le leggi della probabilità**. Questa legge riveste una grande importanza perché permette:

- di assumere **la probabilità di un evento come previsione approssimata della frequenza** con cui questo si presenterà in un numero elevato di prove.
- di assumere **la frequenza**, calcolata in un grande numero di prove, **come misura approssimata della probabilità**, quando non si sappia calcolarla secondo la definizione.

Non c'è peggior cieco di chi non vuol vedere

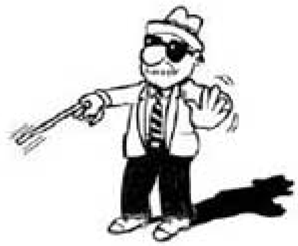
Un problema è alla base della scarsa fiducia che le persone ripongono nella scienza della statistica e nella scienza dello studio delle probabilità ed è che **non c'è peggior cieco di chi non vuol vedere**, spieghiamo meglio il concetto: **devono essere i dati a parlare e non si deve mai metter in bocca ai dati ciò che noi vorremmo dicessero**. Se i dati non sono analizzati integralmente, lasciando che dicano anche cose sgradevoli, ma si ricercano e si selezionano solo al fine di avvalorare le proprie tesi, si effettua un uso scorretto dello strumento.
Ad esempio:

---

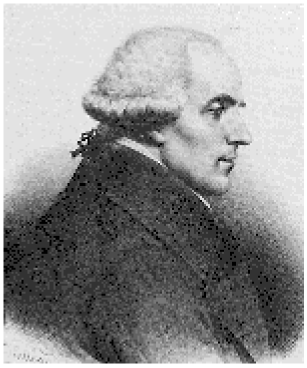
[4] Pierre-Simon Laplace (Beaumont-en-Auge, 23 marzo 1749 – Parigi, 5 marzo 1827) matematico francese: l'esperienza ci dice che se il numero delle prove è sufficientemente elevato, la frequenza assume un valore prossimo a quello della probabilità.
[5] Lindeberg-Lévy
[6] Da greco *stocházesthai* = fare congetture,

$$5+3+4=7$$

Sarebbe errato… utilizziamo il condizionale perché basterebbe nascondere sotto un oggetto il "5 +" e il gioco è fatto! Non si tratta di una scorrettezza, non si tratta di un inganno, si tratta solo di rimuovere un caso (sicuramente isolato!) che disturba la nostra teoria, la quale (sicuramente) è corretta.



E io… ridarò la vista ai ciechi



Se si considera l'osservazione del ripetersi di un evento sia:
- **p** il numero di volte che esso si verifica;
- **q** il numero di volte che esso non si verifica;
- ¬ indica una negazione (¬ **q** equivale al non verificarsi di **q**).

Allora:

$$p+q=100\%=1$$

Dal punto di vista logico si ha che:
- **p**, è il numero di osservazioni positive;
- ¬ **q**, è il numero di osservazioni non negative;

Allora:

$$p=\neg q$$

Si consideri a questo punto il seguente quesito[7]: sia dato un mazzo di carte; ogni carta reca una lettera su una faccia e un numero sull'altra; occorre dimostrare la regola: **se c'è una vocale su un lato allora c'è un numero pari sull'altro lato**.

E K 4 7

Quali carte si devono girare per stabilire se la regola è vera o falsa?
Il compito di selezione è stato ideato per individuare quali stati del mondo (**p**, ¬ **p**, **q**, ¬ **q**) le persone scelgano di controllare per stabilire il valore di verità di una regola condizionale del tipo "se… allora…". La

[7] Si tratta del "compito di selezione" di Peter Cathcart Wason (Somerset 22 aprile 1924 – Oxfordshire 17 aprile 2003) psicologo.

risposta logicamente corretta è quella falsificazionista che consiste nella selezione per *modus ponens*[8] e per *modus tollens*[9], in caso contrario si realizza un **bias**[10].
Premesso ciò, si osserva che le risposte corrette sono fornite da un numero esiguo di partecipanti. Tuttavia, i risultati migliorano considerevolmente se i compiti vengono presentati in versione pragmatica e si utilizzano **regole deontiche**[11], in cui però lo statuto della regola passa da incerto a certo e la consegna si tramuta in una ricerca dei violatori della regola.
Tornando al quesito, la risposta corretta è di girare solo due carte: la carta **7** e la carta **E**, infatti, se dietro la carta **E** c'è un numero dispari, la regola è falsa; così, se dietro la carta **7** c'è una vocale, la regola è falsa: qualunque carta che abbia una vocale su lato e un numero dispari sull'altro viola la regola. Invece, scegliere la carta **4** e la carta **B** non serve perché la regola dice "*se c'è una vocale, allora c'è un numero pari*" e non "*solo se c'è una vocale*", per cui dietro la carta **4** potrebbe esserci sia una vocale che una consonante, così come dietro la carta **B** potrebbe esserci sia un numero dispari che un numero pari (vedi tavola di verità del condizionale). Ora, il 90% delle persone sceglie la carta **E** (**p**) e solo il 10% la carta **7** (¬ **q**).
Secondo i logici[12] la mancata scelta della carta ¬ **q** è considerata come la prova dell'assenza dello schema *modus tollens* dalla mente delle persone. Si tratta del **bias di conferma**: le persone tendono a cercare informazioni che confermano le loro ipotesi, tendono invece a evitare informazioni che contrastino con le loro supposizioni.
Venendo al dunque, nel ragionamento probabilistico, le difficoltà maggiori consistono nel non valutare la probabilità sulla base di parametri oggettivi come la frequenza ma soggettivi come:

- la maggiore disponibilità/accessibilità di certe rappresentazioni,
- la presenza di stereotipi.

Ispezionare poco, ma controllare tutto

Ci sono vari elementi che impediscono di utilizzare la statistica descrittiva, ad esempio:

- la necessità di eseguire delle prove distruttive per ottenere l'informazione;
- l'impossibilità di realizzare per tempi e costi un controllo al 100%;
- la mancanza di risorse da dedicare alla raccolta e sintesi dei dati;
- la ridondanza[13] delle informazioni che si ottengono.

Per ovviare a ciò occorre trovare un metodo per ispezionare poco, ma contemporaneamente controllare, attraverso stime affidabili, tutto.
Tutto ciò perché **l'obiettivo del controllo statistico di processo non è quello di censire, ma quello di capire**.
Quindi, mentre l'indagine di tipo statistico descrittiva fornisce il valore "vero" dei parametri di interesse (proporzioni, percentuali, medie, totali, etc.), **l'indagine di tipo statistico inferenziale restituisce degli stimatori**[14] **ai quali è associato un grado di fiducia che è quantificabile se la formazione del campione risponde a criteri di tipo probabilistico** (da qui il concetto: Statistica & Probabilità). Ne deriva che il campionamento si utilizza allorché si desideri conoscere uno o più parametri di una popolazione, senza però doverne analizzare ogni singolo elemento.
Esistono varie modalità di selezione del campione:

- per quote o "di comodo";
- ragionata;
- casuale;
- probabilistico;

tuttavia, a prescindere dalle modalità, **il campione deve essere sempre rappresentativo della popolazione**.

---

[8] Dal latino: "*modo che afferma*", è una semplice e valida regola d'inferenza detta anche **principio di disgiunzione**.
[9] Dal latino: "*modo che toglie*", è una semplice e valida regola d'inferenza detta anche **principio anapodittico**.
[10] Dall'inglese *bias* = inclinazione, dovuto a Francis Bacon (Londra, 22 gennaio 1561 – Londra, 9 aprile 1626) filosofo: "*si tratta di un peculiare e ripetitivo errore del capire umano di propendere maggiormente e con più enfasi nei confronti delle affermazioni più che delle negazioni*", nel significato di deviazione dovuta alla presenza d'un errore sistematico.
[11] Dal greco *déonontos* = dovere, con il significato di obbligatorietà nella logica del discorso normativo che studia le relazioni tra asserzioni prescrittive che esprimono obblighi, divieti, permessi.
[12] Teoria della logica mentale di Braine.
[13] Accade quando: l'eliminazione di parte dei dati non comporta una perdita sostanziale dell'informazione in essi contenuta.
[14] Uno stimatore è una funzione che associa a ogni possibile campione un valore del parametro da stimare, il valore assunto dallo stimatore in corrispondenza a un particolare campione è detto stima, ne deriva che uno stimatore è una variabile casuale funzione del campione.

Mi raccomando, che sia di quello buono…

Chiunque sia andato da un fruttivendolo o più semplicemente in un negozio di alimentari ha avuto l'occasione di ascoltare la frase: "Mi raccomando, che sia di quello buono…".

Perché questa introduzione? Perché in generale **non si dispone di un criterio per determinare quale stimatore per una data quantità sia il migliore**. Nell'ambito della statistica classica, ad ogni modo, è stata proposta una serie di proprietà considerate desiderabili per uno stimatore:

- correttezza,
- consistenza,
- efficienza,
- sufficienza,
- completezza,
- ancillarità[15],

Se queste premesse sono tutte soddisfatte si parla di **stimatore baynesiano**.

Correttezza

Uno stimatore si considera **corretto** se non è affetto da bias di campionamento, cioè se la probabilità di inclusione nel campione di individui appartenenti alla popolazione dipende esclusivamente dalle caratteristiche della popolazione e non dalla casualità con cui si scelgono gli elementi apparenti al campione. La correttezza ha anche elementi di asintoticità:

$$\lim_{n \to \infty} \mu = X$$

Consistenza

La **consistenza** è una proprietà di desiderabilità degli stimatori. In sostanza uno stimatore è consistente se, all'aumentare dell'informazione (numerosità del campione), la sua distribuzione di probabilità si concentra in corrispondenza al valore del parametro da stimare.

Efficienza

L'**efficienza** è una misura di desiderabilità di uno stimatore, definita in termini di varianza, tramite l'errore quadratico medio (in inglese *Mean Squared Error* o MSE).

[15] Dal latino *ancilla* = serva, nel significato di qualcosa che è di supporto.

$$MSE = \frac{\sum_{i=0}^{n} \left(x_i - \hat{x}_i\right)^2}{n}$$

Sufficienza

La **sufficienza** di una statistica (intesa come funzione di un campione d'osservazioni) definisce formalmente la capacità di tale funzione di rappresentare in maniera sintetica l'informazione contenuta nel campione. Un qualsiasi stimatore non distorto è uno stimatore sufficiente.

Completezza

La completezza di una statistica comporta che per famiglie complete alcune procedure inferenziali sono uniche.

Ancillarità

L'ancillarità di una statistica non contiene informazioni sullo stimatore, ma se utilizzata assieme a una statistica sufficiente minimale allora può migliorare le informazioni sullo stimatore.

Stima = parametro + errore

In teoria della probabilità, il **valore atteso** (chiamato anche aspettazione, attesa, media o speranza matematica) di una variabile casuale reale, è un numero che formalizza l'idea euristica[16] di valore medio di un fenomeno aleatorio. Tale valore è poi corredato da altri elementi (quali, ad esempio, la **varianza**) che tendono a descriverne il livello di affidabilità o di corrispondenza a un predeterminato modello matematico stocastico.
Per evitare che la stima risenta della soggettività del campione si ricorre a più campioni, selezionati in modo casuale dalla popolazione e si sfrutta il teorema del limite centrale o della media delle medie:

- la distribuzione delle medie campionarie è approssimabile alla distribuzione normale, indipendentemente dalla distribuzione dei valori nella popolazione d'origine, da cui i campioni sono stati tratti;
- la media delle medie campionarie è uguale alla media della popolazione d'origine;
- la deviazione standard delle medie campionarie è l'errore standard calcolato sulla popolazione (funzione sia della deviazione standard della popolazione sia della numerosità del campione).

Se so di non sapere: controlli di processo, controllo in accettazione e pre-controllo

La statistica inferenziale, permettendo di esprimere giudizi sul tutto partendo da una parte, offre soluzioni di controllo molto efficaci con un notevole risparmio di tempo e di risorse rispetto al classico controllo 100%.
Si riconoscono così (per scopo e modalità esecutive) tre applicazioni:

- il **controllo statistico di processo**, che non consiste in una conta dei vivi e dei morti, ma nel comprendere da dove si originino anomalie statistico-stocastiche in un processo in base a delle regole quali, ad esempio, la deriva o le ricorrenze;
- il **pre-controllo**, che consiste in reperire rapidamente informazioni su come orientare il processo al fine di avere sempre un prodotto conforme alle specifiche basandosi su valutazioni di tipo stocastico.
- il **controllo in accettazione**, volto a definire la probabilità di trovare elementi difettosi tra quelli impiegati effettuando osservazioni stocastiche sulle dimensioni del lotto, sulle dimensioni del campione, sul numero massimo di elementi difettosi ammessi, sul numero di elementi difettosi che comportano il rifiuto del lotto;

Le differenze tra questi tre utilizzi della statistica si basa su quanto si conosce dell'insieme da controllore e su che impiego se ne deve fare. È quindi basilare avere chiaro: **cosa si conosce e cosa non si conosce dell'insieme da controllare**.

[16] Si definisce procedimento euristico, un metodo di approccio alla soluzione dei problemi, che non segue un chiaro percorso, ma si affida all'intuito e allo stato temporaneo delle circostanze, al fine di generare nuova conoscenza.

Matematica, richiami di teoria

Diventa a questo punto necessario fare qualche richiamo di teoria e, per la precisione, un richiamo sui coefficienti binomiali.

Definizione di fattoriale

Se ***n*** è un numero naturale maggiore di zero allora il prodotto così determinato:

$$n! = \prod_{x=1}^{n} x = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

si definisce ***n*** fattoriale. È invece un assioma 0! = 1, ne deriva la possibilità di fornire in maniera generale una definizione ricorsiva:

$$n! = \begin{cases} 1 & se\ n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & se\ n \geq 1 \end{cases}$$

Si nota che il calcolo di ***n***! anche con l'utilizzo della calcolatrice non è agevole essendo, ad esempio: $70! > 10^{100}$. Poiché nella pratica è spesso più utile conoscere facilmente un'approssimazione del valore che con difficoltà l'esatto valore, si può ricorrere all'**approssimazione di Sterling**:

$$n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{n}$$

Definizione insiemistica di coefficiente binomiale

Se ***n*** e ***k*** sono due numeri naturali ed è $0 < k \leq n$ allora:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Nel caso in cui ***k*** = 0 vige l'assioma:

$$\binom{n}{0} = 1$$

Un modo particolare di rappresentare il coefficiente binomiale è quello di vederlo come una serie di prodotti:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-(k-1)}{k} = \prod_{x=1}^{n} \frac{n-(x-1)}{x}$$

Proprietà e teoremi dei coefficienti binomiali

I coefficienti binomiali possono essere costruiti, riga per riga, mediante il triangolo di Tartaglia:

1	1
2	1 1
3	1 2 1
4	1 3 3 1
5	1 4 6 4 1
6	1 5 10 10 5 1
7	1 6 15 20 15 6 1

Ogni riga n contiene i coefficienti:

$$\binom{n}{0};\binom{n}{1};\binom{n}{2};\dots;\binom{n}{n}$$

Ogni elemento di una riga successiva è ottenibile come somma dei coefficienti posizionati a destra e a sinistra della riga precedente, proprietà che prende il nome di **teorema della scomposizione**: se $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{k}$ sono due numeri naturali ed è $0 \le \boldsymbol{k} \le \boldsymbol{n}$ allora

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

Proprietà complementare:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

Sommatorie e proprietà

La principale proprietà delle sommatorie è quella additiva, cioè:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$$

Consideriamo quindi alcune sommatorie notevoli come la serie binomiale:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Lo sviluppo in serie della potenza di un binomio $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} = (a+b)^n$$

Lo sviluppo in serie della funzione euleriana $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{a}}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

Lo sviluppo in serie della funzione logaritmica ***ln***(1+z):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{k+1}}{k+1} = \log(z+1)$$

Lo sviluppo in serie delle funzioni trigonometriche:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!} = \sin(z)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{z^{2\cdot k}}{2\cdot k!} = \cos(z)$$

Integrali e proprietà

Tra le principali proprietà d'integrazione sono da ricordare:

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx$$

$$\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int f(g(x))\,dx = \frac{1}{a}\cdot\int f(z)\cdot\frac{dx}{dz}\cdot dz \Leftrightarrow z = g(x)$$

$$\int g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)\,dx = \int f(x)\cdot g(x)\,dx - \int f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)\,dx$$

Tra gli integrali notevoli è utile ricordare:

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\cdot x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Probabilità condizionata

Se **A** e **B** sono due eventi la probabilità che si presenti l'evento **A** in concomitanza con l'evento **B** è indicata con il simbolo Pr {**A**|**B**} e viene definita probabilità condizionata dell'evento **A** posto che l'evento **B** sia presente.
Posto che Pr{**B**}>0, allora

$$\Pr\{A\,|\,B\} = \frac{\Pr\{A\cap B\}}{\Pr\{B\}}$$

Se il presentarsi o meno dell'evento **B** non influenza in alcun modo il verificarsi dell'evento **A**, cioè

$$\Pr\{A\,|\,B\} = \Pr\{A\}$$

allora l'evento **A** si dice **indipendente** dall'evento **B** e **dipendente** nel caso contrario.
Se **B** rappresenta lo stato di conoscenza il livello di fiducia che viene attribuito all'evento **A** è condizionato da esso e cambia in conseguenza di esso.
Se Pr{**B**} è la probabilità che si presenti l'evento **B**, la **probabilità composta** che si presentino contemporaneamente l'evento **A** e l'evento **B** sarà:

$$\Pr\{A\cap B\} = \Pr\{A\,|\,B\}\cdot\Pr\{B\}$$

Ora, due eventi **A** e **B** si dicono autoescludenti se il comparire di uno esclude il presentarsi dell'altro. La probabilità dell'unione di due eventi autoescludenti è in questo caso pari alla somma delle probabilità attribuite ai singoli eventi.
Se **A** e **B** sono due eventi tali che

$$A \bigcup B \neq 0$$

allora è evidente che

$$\Pr\{A \bigcup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{A \bigcap B\}$$

Operazioni elementari

La **somma** di due eventi **A** e **B** è la probabilità che almeno uno dei due eventi avvenga e l'insieme unione dei due corrispondenti insiemi:

$$\Pr(A + B) = \Pr(A \bigcup B)$$
$$\Pr(A - B) = \Pr(A \bigcup \neg B)$$

ATTENZIONE: l'insieme unione non è dato dalla **somma** degli eventi **A** e **B**, perché occorre detrarre l'insieme intersezione che, in caso contrario verrebbe conteggiato due volte.

$$\Pr(A \bigcup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \bigcap B)$$

In altri termini:

$$A \bigcap B \neq \varnothing \Rightarrow \Pr(A + B) \neq \Pr(A) + \Pr(B)$$

Il **prodotto** di due eventi **A** e **B** è la probabilità che i due eventi si verifichino contemporaneamente ed è rappresentato dal risultato dell'operazione d'intersezione fra i due corrispondenti insiemi:

$$\Pr(A \cdot B) = \Pr(A \bigcap B)$$

Ne deriva:

$$\Pr(A + B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cdot B)$$

Teorema di Bayes

Se consideriamo l'evento **E** effetto di una serie di cause $\mathbf{C}_i$, in base a quanto asserito si ha la seguente relazione:

$$\Pr(C_j \mid E) = \frac{\Pr(E \mid C_j) \cdot \Pr(C_J)}{\sum_{i=1}^{n} \Pr(E \mid C_i) \cdot \Pr(C_i)} = \frac{\Pr(C_j \bigcap E)}{\Pr(E)}$$

nota come teorema di Bayes che in pratica analizza la probabilità che quando si manifesta un effetto **E** sia presente la causa $\mathbf{C}_j$ pur non essendo detto che questa sia la causa scatenante (si richiede solo che la causa sia presente).

Funzione generatrice dei momenti

Si consideri la seguente funzione in ***t***:

$$\phi(t) = E(e^{t\cdot x}) \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} e^{t\cdot x_i} \cdot \Pr(x_i) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\cdot x} \cdot f(x)\, dx \end{cases}$$

tale funzione è detta **funzione generatrice dei momenti**, perché se si considera il suo sviluppo in serie si nota che:

$$\phi^r(t) = {}_0\mu_r = E(x^r)$$

per ogni $\boldsymbol{r} \in \mathbf{N}$.
Consideriamo un attributo che possa essere presente (1) o assente (0), sia $\boldsymbol{p}$=**Pr**(1) e $\boldsymbol{q}$=**Pr**(0), allora:

$$\Pr(x_i) = p^{x_i} \cdot q^{1-x_i} \Rightarrow E(e^{t\cdot x}) = \sum_{i=0}^{1} e^{tx_i} \cdot \Pr(x_i) = e^{t0} \cdot \Pr(0) + e^{t1} \cdot \Pr(1) = q + e^t \cdot p$$

quindi:

$$\left[\frac{dE(e^{t\cdot x})}{dt}\right]_{t=0} = \left[e^t \cdot p\right]_{t=0} = p$$

$$\left[\frac{d^2E(e^{t\cdot x})}{dt^2}\right]_{t=0} = \left[e^t \cdot p\right]_{t=0} = p$$

Consideriamo la seguente distribuzione di probabilità:

$$\Pr(x_i) = \binom{n}{x_i} \cdot p^{x_i} \cdot q^{n-x_i}$$

ne consegue che

$$E(e^{t\cdot x}) = \sum_{i=0}^{n} e^{tx_i} \cdot \binom{n}{x_i} \cdot p^{x_i} \cdot q^{n-x_i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{x_i} \cdot \left(e^t \cdot p\right)^{x_i} \cdot q^{n-x_i}$$

Appare evidente che i valori all'interno della sommatoria non siano altro che i termini che compongono lo sviluppo della potenza di un binomio:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k} = (a+b)^n \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{x_i} \cdot \left(e^t \cdot p\right)^{x_i} \cdot q^{n-x_i} = \left(e^t \cdot p + q\right)^n$$

Ora, poiché $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ esauriscono tutti i casi possibili, si ha $\boldsymbol{q}$=(1-$\boldsymbol{p}$) quindi:

$$\left[\frac{dE(e^{t\cdot x})}{dt}\right]_{t=0} = \left[n \cdot e^t \cdot p \cdot \left(e^t \cdot p + q\right)^{n-1}\right]_{t=0} = n \cdot p$$

$$\left[\frac{d^2E(e^{t\cdot x})}{dt^2}\right]_{t=0} = \left[n \cdot e^t \cdot p \cdot \left(e^t \cdot p + q\right)^{n-1} + n \cdot (n-1) \cdot \left(e^t \cdot p\right)^2 \cdot \left(e^t \cdot p + q\right)^{n-2}\right]_{t=0} = n \cdot p + n \cdot (n-1) \cdot p^2$$

Consideriamo la seguente distribuzione di probabilità:

$$\Pr(x_i) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

ne consegue che

$$E(e^{t \cdot x}) = \sum_{i=0}^{n} e^{t \cdot x_i} \cdot \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{(e^t \cdot \lambda)^{x_i}}{x_i!}$$

Appare evidente che i valori all'interno della sommatoria non siano altro che i termini che compongono lo sviluppo dell'esponenziale:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(e^t \cdot \lambda)^{x_i}}{x_i!} = e^{e^t \cdot \lambda}$$

per cui:

$$E(e^{t \cdot x}) = e^{\lambda \cdot (e^t - 1)}$$

Ora, poiché ***p*** e ***q*** esauriscono tutti i casi possibili, si a ***q***=(1-***p***) quindi:

$$\left[\frac{dE(e^{t \cdot x})}{dt}\right]_{t=0} = \left[\lambda \cdot e^t \cdot e^{\lambda \cdot (e^t - 1)}\right]_{t=0} = \lambda$$

$$\left[\frac{d^2 E(e^{t \cdot x})}{dt^2}\right]_{t=0} = \left[(\lambda \cdot e^t)^2 \cdot e^{\lambda \cdot (e^t - 1)} + \lambda \cdot e^t \cdot e^{\lambda \cdot (e^t - 1)}\right]_{t=0} = \lambda^2 + \lambda$$

Consideriamo la seguente distribuzione di probabilità continua:

$$f(x_i) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}$$

ne consegue che

$$E(e^{t \cdot x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t \cdot x} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t \cdot x - \frac{x^2}{2}}\, dx$$

posto che

$$2 \cdot t \cdot x - x^2 + (t^2 - t^2) = t^2 - (x - t)^2$$

si ha

$$E(e^{t \cdot x}) = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\, dx = \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

Appare evidente che i valori all'interno della sommatoria non siano altro che i termini che compongono lo sviluppo dell'esponenziale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

per cui:

$$E(e^{t\cdot x}) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

quindi:

$$\left[\frac{dE(e^{t\cdot x})}{dt}\right]_{t=0} = \left[t \cdot e^{\frac{t^2}{2}}\right]_{t=0} = 0$$

$$\left[\frac{d^2E(e^{t\cdot x})}{dt^2}\right]_{t=0} = \left[(1+t^2)\cdot e^{\frac{t^2}{2}}\right]_{t=0} = 1$$

Per ora è sufficiente comprendere il meccanismo di calcolo delle funzioni generatrici dei momenti che trovano la loro applicazione nel calcolo delle probabilità e nella determinazione analitica di indici statistici quali la media e la varianza.

Proprietà delle sommatorie applicate ai momenti

Sia ***m*** una costante e sia data la seguente sommatoria:

$$_m\mu_r = \frac{\sum (x-m)^r}{n} \Rightarrow {}_0\mu_r = \frac{\sum x^r}{n}$$

allora se ***m***$={}_0\mu_1$:

$$_m\mu_2 = \frac{\sum\left(x^2 - 2\cdot x\cdot{}_0\mu_2 + {}_0\mu_1^2\right)}{n} = \frac{\sum x^2}{n} - 2\cdot\frac{\sum x}{n}\cdot{}_0\mu_1 + \frac{n\cdot{}_0\mu_1^2}{n} = {}_0\mu_2 - 2\cdot{}_0\mu_1^2 + {}_0\mu_1^2 = {}_0\mu_2 - {}_0\mu_1^2$$

Ne consegue:

$$_m\mu_3 = {}_0\mu_3 - 3\cdot{}_0\mu_2\cdot{}_0\mu_1 + 2\cdot{}_0\mu_1^2$$
$$_m\mu_4 = {}_0\mu_4 - 4\cdot{}_0\mu_3\cdot{}_0\mu_1 + 6\cdot{}_0\mu_2\cdot{}_0\mu_1^2 - 3\cdot{}_0\mu_1^4$$